

## H.S. PRE-FINAL EXAMINATION, 2021-22

## MATHEMATICS

Full Marks : 100

Time : Three hours

1. Answer the following questions :

1×10 = 10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the identity for the addition operation on the set of real number  $\mathbb{R}$ ?বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিত ( $\mathbb{R}$ ) যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে একক মৌলটো কি?(b) Let  $A = \{1, 2, 3\}$ . For  $x, y \in A$ . Let  $xRy$  if and only if  $x > y$ . Write down  $R$  as a subset of  $A \times A$ .এটা সংহতি  $A = \{1, 2, 3\}$ ৰ ওপৰত  $R$  এটা সম্পৰ্ক আৰু  $xRy \Leftrightarrow x > y$ .  $R$  সম্পৰ্কটো  $A \times A$  ৰ উপসংহতি হিচাপে লিখা।(c) Write down the Range of  $f(x) = \tan^{-1}x$ . $f(x) = \tan^{-1}x$  ফলনটোৰ পৰিসৰটো লিখা।

(d) If a matrix has 18 elements, how many possible matrices can be formed using these elements.

এটা মৌলকক্ষৰ 18 টা মৌল আছে। এই মৌলকেইটা ব্যৱহাৰ কৰি কিমানটা সম্ভাৱ্য মৌলকক্ষ গঠন কৰিব পাৰি?

(e) Give an example of a diagonal matrix.

এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষৰ উদাহৰণ দিয়া।

(f) Define continuous function.

অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) State true or false : "Identity function on real number is continuous."

শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা : "বাস্তৱ সংখ্যাৰ একক ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।"

(h) Write Leibnitz rule of derivatives.

অবকলজৰ Leibnitz ৰ সূত্রটো লিখা।

(i) Every differentiable function is continuous – State true or false.

“প্রত্যেকটো অবকলনীয় ফলনেই অবিচ্ছিন্ন” - উক্তিটো শুদ্ধ নে অশুদ্ধ?

(j) Find the direction cosine of the X-axis.

X অক্ষৰ দিশাংক নির্ণয় কৰা।

2. Let  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  be defined by

4

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ is even} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Examine whether the function bijective or not.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ অযুগ্ম} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ যুগ্ম} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

3. Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined as  $f(x) = 10x + 7$ . Find the function  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.t

$$\text{gof} = \text{fog} = I_{\mathbb{R}}$$

4

ধৰাহ'ল  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  এটা ফলন,  $f(x) = 10x + 7$ .  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  নির্ণয় কৰা যাতে

$$\text{gof} = \text{fog} = I_{\mathbb{R}}$$

Or (অথবা)

Show that (দেখুওৱা যে),

$$\cot^{-1} \left( \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right) = \frac{x}{2}, \quad x \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right).$$

4. If (যদি)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  5

Prove that (প্রমাণ কৰা যে),  $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

Or (অথবা)

If (যদি)  $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Show that (দেখুওৱা যে),  $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

5. Using elementary transformation, find the inverse of the matrix. 5

মৌলিক প্ৰক্ৰিয়া ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ মৌল কক্ষৰ বিপৰীত মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Or (অথবা)

If (যদি)  $A = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$  then prove that (তেজ্বে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$A^n = \begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. Show that (দেখুওৱা যে) 5

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

7. Using properties of determinants, show that (নির্ণায়কৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে),

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2

Or (অথবা)

$$\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$$

8. Discuss the continuity of the function (ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা)

2

$$f(x) = x^2 \text{ at } x = 0$$

Or (অথবা)

$$f(x) = |x| \text{ at } x = 0$$

9. Examine the continuity of the following function

( $\lambda$  তলৰ ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা।)

4

$$f(x) = \begin{cases} x+2; & \text{if } x < 1 \\ 0; & \text{if } x = 1 \\ x-2; & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

10. For what value of  $\lambda$ , the following function is continuous at  $x = 0$ .

4

( $\lambda$  ৰ কি মানৰ বাবে তলৰ ফলনটো  $x = 0$  ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x) & \text{if } x \leq 0 \\ 4x+1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

Or (অথবা)

Find the relationship between  $a$  and  $b$ , so that the following function is continuous at  $x = 3$ .

(যদি তলৰ ফলনটো  $x = 3$  ত অবিচ্ছিন্ন হয় তেন্তে  $a$  আৰু  $b$  ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো নিৰ্ণয় কৰা)

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{if } x \leq 3 \\ bx+3 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

11. Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :  $\frac{d}{dt}[\sin(t^3)]$  2

12. Differentiate with respect to  $x$  where ( $x$  সাপেক্ষে অৱকলন কৰা)

(i)  $f(x) = \cos x^3 \cdot \sin^2(x^6)$  3

Or (অথবা)

(ii)  $f(x) = \cos(\tan(\sqrt{x}))$

13. Find  $\frac{dy}{dx}$  if  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  3

যদি  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , তেন্তে  $\frac{dy}{dx}$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Or (অথবা)

Verify Roll's theorem for the function  $y = x^2 + 2$  on the interval  $[-2, 2]$ .

$[-2, 2]$  অন্তৰালত  $y = x^2 + 2$  ফলনটোৰ ৰোলৰ উপপাদ্যৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰা।

14. Find the following integral (any four) :  $4 \times 3 = 12$

তলত দিয়া যিকোনো 4 টাৰ অনুকলন কৰা :

(i)  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$  (ii)  $\int (2x^2 + e^x) dx$  (iii)  $\int (1-x)\sqrt{x} dx$

(iv)  $\int (2x - 3\cos x + e^x) dx$  (v)  $\int \frac{x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x}} dx$  (vi)  $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

15. Find the following integrals by substitution method (any one).

4

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিৰ সহায়ত অনুকলন কৰা (যিকোনো এটা)

(i)  $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx$

(ii)  $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$

16. Find the following integrals using trigonometric identities (any two) :  $2 \times 3 = 6$

ত্রিকোণমিতিৰ অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি অনুকলন কৰা (যিকোনো দুটা)

(i)  $\int \cos^2 x dx$

(ii)  $\int \sin^4 x \sin x dx$

(iii)  $\int \sin^4 x dx$

17. Classify the following measures as scalar and vectors :

2

তলৰ ৰাশিকেইটা ভেক্টৰ নে স্কেলাৰ নিৰ্ণয় কৰা :

(i) 40 watt

(ii) 1 meter north-east

18. Find a vector in the direction of vector  $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  which has magnitude 8 units.

$5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  ভেক্টৰৰ দিশত 8 একক মাপাংক বিশিষ্ট এটা ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

3

19. Find the angle  $\theta$  between the vectors (ভেক্টৰ ৰাশি দুটাৰ মাজৰ কোণ  $\theta$  নিৰ্ণয় কৰা) :

3

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ and } \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

20. The two adjacent sides of a parallelogram are  $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$  and  $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ . Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find the area.

4

এটা সামান্তৰিকৰ দুটা সন্নিহিত বাহু ক্ৰমে  $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$  আৰু  $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ . সামান্তৰিকৰ কৰ্ণৰ সমান্তৰাল হোৱাকৈ এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা। লগতে সামান্তৰিকটোৰ কালি উলিওৱা।

Or (অথবা)

Three vectors  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  and  $\vec{c}$  satisfy the condition  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . Evaluate the quantity

$$\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} \text{ if } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4 \text{ and } |\vec{c}| = 2.$$

তিনিটা ভেক্টৰ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  আৰু  $\vec{c}$  এনেকুৱা যে  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . যদি  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$  আৰু  $|\vec{c}| = 2$ ,

তেন্তে  $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

21. If  $l, m, n$  are direction cosines of a line prove that  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  5

যদি এডাল ৰেখাৰ দিশাংক  $l, m, n$  হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

22. Find the angles between the pair of lines (ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা) 3

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}, \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

23. Find the distance of the plane  $2x - 3y + 4z - 6 = 0$  from the origin. 1

মূল বিন্দুৰ পৰা সমতল  $2x - 3y + 4z - 6 = 0$  ৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

24. Show that  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(1, -2, 3)$  and  $C(3, 8, -11)$  are collinear. 1

দেখুওৱা যে  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(1, -2, 3)$  আৰু  $C(3, 8, -11)$  বিন্দুকেইটা একৰেখীয়।

